

陈教授解读
2021 AIME I 真题,
核心解题技巧,
精细化答案
Professor Steven Chen



2021 AIME I 第一题

- Zou and Chou are practicing their 100-meter sprints by running 6 races against each other. Zou wins the first race, and after that, the probability that one of them wins a race is $\frac{2}{3}$ if they won the previous race, but only $\frac{1}{3}$ if they lost the previous race. The probability that Zou will win exactly 5 of the 6 races is $\frac{m}{n}$, where m and n are relatively prime positive integers. Find $m + n$.



2021 AIME I 第一题

- 核心解题技巧
 - 逆向思维分析Chou的问题
 - 分类讨论
 - 条件概率公式：贝叶斯公式 (Bayes' rule)
- 都是陈教授教育学院培训课程AMC 12+中重点训练的内容



2021 AIME I 第一题

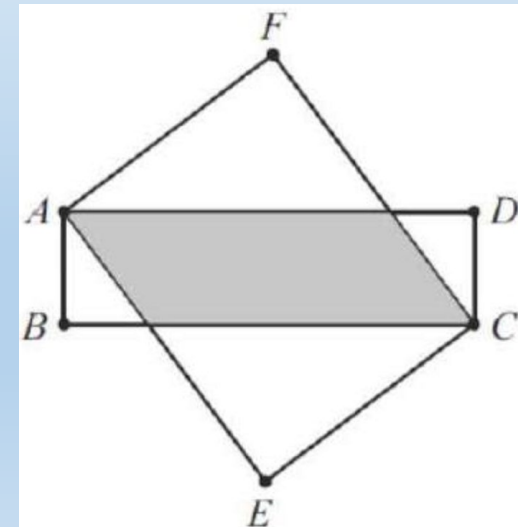
- 精细化答案

$$\frac{m}{n} = \frac{16}{81} \rightarrow m + n = 097$$



2021 AIME I 第二题

- In the diagram below, $ABCD$ is a rectangle with side lengths $AB = 3$ and $BC = 11$, and $AECF$ is a rectangle with side lengths $AF = 7$ and $FC = 9$, as shown. The area of the shaded region common to the interiors of both rectangles is m/n , where m and n are relatively prime positive integers. Find $m + n$.

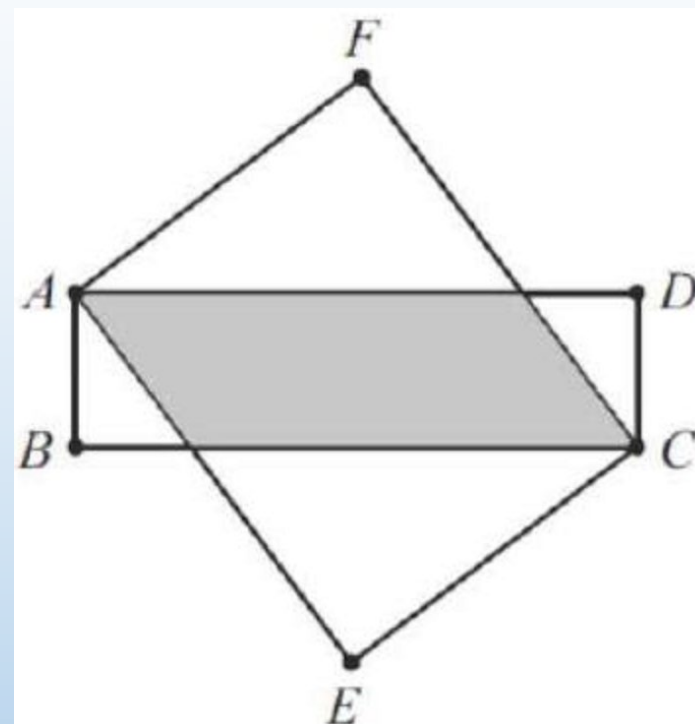


2021 AIME I 第二题

- 核心解题技巧

- 平行四边形面积公式
- 两个长方形拥有共同的对角线 AC
- 通过计算 $\angle FAD$ 的正切值计算该角度的余弦值
- 两角差的正切公式

$$\tan \angle FAD = \tan(\angle FAC - \angle DAC)$$



都是陈教授教育学院培训课程AMC 12+中重点训练的内容



2021 AIME I 第二题

- 精细化答案

$$\frac{m}{n} = \frac{105}{4} \rightarrow m + n = 109$$



2021 AIME I 第三题

- Find the number of positive integers less than 1000 that can be expressed as the difference of two integral powers of 2.



2021 AIME I 第三题

- 核心解题技巧
 - 因式分解 $k = 2^n(2^p - 1)$
 - 分类讨论 $n = 0, 1, \dots, 9$
- 都是陈教授教育学院培训课程AMC 12+中重点训练的内容



2021 AIME I 第三题

- 精细化答案

$$9+8+7+6+5+5+4+3+2+1=050$$



2021 AIME I 第四题

- Find the number of ways 66 identical coins can be separated into three nonempty piles so that there are fewer coins in the first pile than in the second pile and fewer coins in the second pile than in the third pile.



2021 AIME I 第四题

- 核心解题技巧
 - 补充对称性
 - 集合运算
 - 资源分配的组合模型
- 都是陈教授教育学院培训课程AMC 12+中重点训练的内容



2021 AIME I 第四题

- 精细化答案

331



2021 AIME I 第五题

- Call a three term strictly increasing arithmetic sequence of integers special if the sum of the squares of the three terms equals the product of the middle term and the square of the common difference. Find the sum of the third terms of all special sequences.



2021 AIME I 第五题

- 核心解题技巧
 - 奇数项等差数列，选取中间项为参照
 - 写成具有因式分解形式的方程
 - 根据等差数列中间项除以3的余数，分类讨论
 - 每一类做整除分析
- 都是陈教授教育学院培训课程AMC 12+中重点训练的内容



2021 AIME I 第五题

- 精细化答案

$$(0, 5, 10), (7, 14, 21) \rightarrow 10 + 21 = 031$$



2021 AIME I 第六题

- Segments \overline{AB} , \overline{AC} , and \overline{AD} are edges of a cube and \overline{AG} is a diagonal through the center of the cube. Point P satisfies $PB = 60\sqrt{10}$, $PC = 60\sqrt{5}$, $PD = 120\sqrt{2}$, and $PG = 36\sqrt{7}$. What is PA ?



2021 AIME I 第六题

- 核心解题技巧
 - 建立三维直角坐标系
 - 两点间距离公式（空间勾股定理）
 - 利用方程组的结构特点，直接求得 PA 长度（不需要求解 P 的坐标）
- 都是陈教授教育学院培训课程AMC 12+中重点训练的内容



2021 AIME I 第六题

- 精细化答案

192



2021 AIME I 第七题

- Find the number of pairs of (m, n) of positive integers with $1 \leq m < n \leq 30$ such that there exists a real number x satisfying

$$\sin(mx) + \sin(nx) = 2.$$



2021 AIME I 第七题

- 核心解题技巧

- 正弦函数性质: $mx = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, nx = \frac{\pi}{2} + 2\pi l$

- 整数方程 $m(1 + 4l) = n(1 + 4k)$

- 同余性质

- 都是陈教授教育学院培训课程AMC 12+中重点训练的内容



2021 AIME I 第七题

- 精细化答案

$$\binom{8}{2} + \binom{7}{2} + \binom{4}{2} + \binom{4}{2} + 1 + 1 = 063$$



2021 AIME I 第八题

- Find the number of integers c such that the equation

$$||20|x| - x^2| - c| = 21$$

- has 12 distinct real solutions.



2021 AIME I 第八题

- 核心解题技巧
 - 如果 x 是一个解, 那么 $-x$ 也是一个解
 - 我们只考虑正数解
 - 分类讨论
- 都是陈教授教育学院培训课程AMC 12+中重点训练的内容



2021 AIME I 第八题

- 精细化答案

$$21 < c < 79 \rightarrow 057$$



2021 AIME I 第九题

- Let $ABCD$ be an isosceles trapezoid with $AD = BC$ and $AB < CD$. Suppose that the distances from A to the lines BC , CD , and BD are 15, 18, and 10, respectively. Let K be the area of $ABCD$. Find $\sqrt{2} \cdot K$.



2021 AIME I 第九题

- 核心解题技巧

- 两种方法计算三角形 ABD 面积, 得出 $BD = \frac{9}{5}AB$
- 三角形 AED 和 AFB 相似, 得出 $AD = \frac{6}{5}AB$
- 在三角形 ABD 使用余弦定理, 求出 $\cos \angle BAD$
- 计算 AD, DE
- 计算 AB, CD
- 利用梯形面积的基本公式

- 都是陈教授教育学院培训课程AMC 12+中重点训练的内容



2021 AIME I 第九题

- 精细化答案

$$\sqrt{2}K = \sqrt{2} \frac{1}{2} (AB + CD) \cdot 18 = \sqrt{2} \frac{1}{2} \left(\frac{45}{2\sqrt{2}} + \frac{81}{2\sqrt{2}} \right) \cdot 18 = 567$$



2021 AIME I 第十题

- Consider the sequence $(a_k)_{k \geq 1}$ of positive rational numbers defined by $a_1 = \frac{2020}{2021}$ and for $k \geq 1$, if $a_k = \frac{m}{n}$ for relatively prime positive integers m and n , then

$$a_{k+1} = \frac{m + 18}{n + 19}.$$

- Determine the sum of all positive integers j such that the rational number a_j can be written in the form $\frac{t}{t+1}$ for some positive integer t .



2021 AIME I 第十题

- 核心解题技巧

- 如果 a_n 的形式是 $\frac{t}{t+1}$, 下一个最近的 a_{n+p} 也是这个形式, 那么

$$a_{n+p} = \frac{t + 18p}{t + 1 + 19p} = \frac{t + 18p}{t + 18p + (p + 1)}$$

- 一定满足条件 $p + 1 | t + 18p$
- $t + 18p \equiv t - 18 \pmod{p + 1}$

- 都是陈教授教育学院培训课程AMC 12+中重点训练的内容



2021 AIME I 第十题

- 精细化答案

$$1 + 2 + 8 + 18 + 30 = 059$$



2021 AIME I 第十一题

- Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral with $AB = 4$, $BC = 5$, $CD = 6$, and $DA = 7$. Let A_1 and C_1 be the feet of the perpendiculars from A and C , respectively, to line BD , and let B_1 and D_1 be the feet of the perpendiculars from B and D , respectively, to line AC . The perimeter of $A_1B_1C_1D_1$ is $\frac{m}{n}$, where m and n are relatively prime positive integers. Find $m + n$.



2021 AIME I 第十一题

- 核心解题技巧
 - 垂心的性质
 - 利用四边和对角线两种方法计算共圆四边形的面积
- 都是陈教授教育学院培训课程AMC 12+中重点训练的内容



2021 AIME I 第十一题

- 精细化答案

$$\frac{242}{59} \rightarrow 242 + 59 = 301$$



2021 AIME I 第十二题

- Let $A_1A_2A_3 \dots A_{12}$ be a dodecagon (12-gon). Three frogs initially sit at A_4 , A_8 , and A_{12} . At the end of each minute, simultaneously, each of the three frogs jumps to one of the two vertices adjacent to its current position, chosen randomly and independently with both choices being equally likely. All three frogs stop jumping as soon as two frogs arrive at the same vertex at the same time. The expected number of minutes until the frogs stop jumping is $\frac{m}{n}$, where m and n are relatively prime positive integers. Find $m + n$.



2021 AIME I 第十二题

- 核心解题技巧
 - 递归方程
- 都是陈教授教育学院培训课程AMC 12+中重点训练的内容



2021 AIME I 第十二题

- 精细化答案

$$\frac{16}{3} \rightarrow m + n = 16 + 3 = 019$$



2021 AIME I 第十三题

- Circles ω_1 and ω_2 with radii 961 and 625, respectively, intersect at distinct points A and B . A third circle is externally tangent to both circles ω_1 and ω_2 . Suppose line AB intersect ω at two points P and Q , such that the measure of the minor arc \widehat{PQ} is 120° . What is the distance between the centers of ω_1 and ω_2 ?



2021 AIME I 第十三题

- 核心解题技巧
 - 陈教授独家秘笈：不画圆，不画辅助线，只画骨架
 - 假设直角坐标系，解方程组
- 都是陈教授教育学院培训课程AMC 12+中重点训练的内容



2021 AIME I 第十三题

- 精细化答案

672



2021 AIME I 第十四题

- For any positive integer a , $\sigma(a)$ denotes the sum of the positive integer divisors of a . Let n be the least positive integer such that $\sigma(a^n) - 1$ is divisible by 2021 for all positive integers a . What is the sum of the prime factors in the prime factorization of n ?



2021 AIME I 第十四题

- 核心解题技巧
 - 特殊值: a 是一个和2021互质的数
 - 欧拉定理
- 都是陈教授教育学院培训课程AMC 12+中重点训练的内容



2021 AIME I 第十四题

- 精细化答案

$$\begin{aligned}n &= \phi(2021) \cdot 2021 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 43 \cdot 47 \\ &\rightarrow 2 + 3 + 7 + 23 + 43 + 47 = 125\end{aligned}$$



2021 AIME I 第十五题

- Let S be the set of positive integers k such that the two parabolas $y = x^2 - k$ and $x = 2(y - 20)^2 - k$ intersect in four distinct points, and these four points lie on a circle with radius at most 21. Find the sum of the least element of S and the greatest element of S .



2021 AIME I 第十五题

- 核心解题技巧

- 把两个抛物线方程重新组合，成为一个圆，一个双曲线，对称轴在同一个水平线上

- $(1) + \frac{(2)}{2}$: 圆

- $(1) - \frac{(2)}{2}$: 双曲线

- k 的上界：圆的半径决定

- k 的下界：双曲线左侧分支顶点和圆的左侧顶点重合

- 都是陈教授教育学院培训课程AMC 12+中重点训练的内容



2021 AIME I 第十五题

- 精细化答案

- k 的上界: $\frac{6731}{24} = 280. \dots$

- k 的下界: $\frac{\sqrt{79}}{2} = 4. \dots$

- 最终答案: $280 + 5 = 285$

